



إعداد و تصميم



**محمود عوض حسن**  
معلم أول رياضيات



## تساوى زوجين مرتبين

• الزوج المرتب: (أ، ب) يسمى زوج مرتب

يسمى أ: المسقط الأول أو الإحداثي السيني

يسمى ب: المسقط الثاني أو الإحداثي الصادي

♦ (أ، ب) ≠ (ب، أ) فمثلا (٥، ٢) ≠ (٢، ٥)

♦ (٣، ١) يسمى زوج مرتب بينما {٣، ١} تسمى مجموعة

■ إذا تساوى زوجين مرتبين فإن :

المسقط الأول = المسقط الأول ، المسقط الثاني = المسقط الثاني

فمثلا: إذا كان (٣، ٥) = (س، ص) فإن: س = ٥ ، ص = ٣

أيضا: إذا كان (١٠، ٢ - س) = (٧، ٢ + ص) فإن س - ٢ = ٧ ← س = ٩ ، ص + ٢ = ١٠ ← ص = ٨

مثال 2

إذا كانت (٣، ٣٢) = (١ + ص، س°) فأوجد قيمة كل من س، ص

$$س° = ٣٢ \therefore س° = ٢°$$

$$\therefore س = ٢$$

$$٣ = ١ + ص \therefore \sqrt[٣]{٢٧} = ١ + ص$$

$$\therefore ص = ٢$$

مثال 1

إذا كانت (١١، ١ - س) = (٣ + ص، ٨) فأوجد قيمة  $\sqrt{٢ + س}$

$$س - ١ = ٨ \therefore س = ٩$$

$$١١ = ٣ + ص \therefore ص = ٨$$

$$\therefore \sqrt{٨ \times ٢ + ٩} = \sqrt{٢ + س}$$

$$٥ = \sqrt{٢٥} = \sqrt{١٦ + ٩} =$$

الحل

أعجب

إذا كانت: (٣، ٥ + أ) = (٨، ب - ١)

فإن أ = ..... ، ب = .....

## حاصل الضرب الديكارتي

حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين منتهيتين غير خاليتين  $S$ ،  $V$

- حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين  $S$ ،  $V$  يكتب  $S \times V$  ويقرأ  $S$  ضرب  $V$
- $S \times V$  : هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول ينتمي للمجموعة  $S$  ومسقطها الثاني ينتمي للمجموعة  $V$ .

$$\text{أي أن: } S \times V = \{ (أ، ب) : أ \in S، ب \in V \}$$

- فمثلاً: إذا كانت  $S = \{1، 3\}$ ،  $V = \{2، 4، 6\}$

$$\text{فإن: } S \times V = \{1، 3\} \times \{2، 4، 6\}$$

$$= \{(1، 2)، (1، 4)، (1، 6)، (3، 2)، (3، 4)، (3، 6)\}$$

$$\text{بينما } V \times S = \{2، 4، 6\} \times \{1، 3\}$$

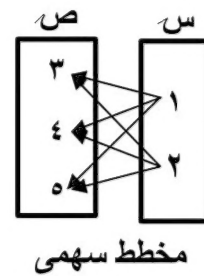
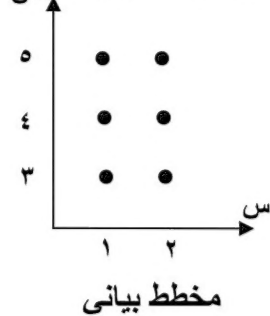
$$= \{(2، 1)، (2، 3)، (4، 1)، (4، 3)، (6، 1)، (6، 3)\}$$

- لاحظ أن:  $S \times V \neq V \times S$
- يمكن تمثيل  $S \times V$  كمخطط سهمي ومخطط بياني كما في المثال التالي.

**مثال** إذا كانت  $S = \{1، 2\}$ ،  $V = \{3، 4، 5\}$

فأوجد  $S \times V$  ومثله بمخطط سهمي وآخر بياني

$$\text{الحل: } S \times V = \{(1، 3)، (1، 4)، (1، 5)، (2، 3)، (2، 4)، (2، 5)\}$$

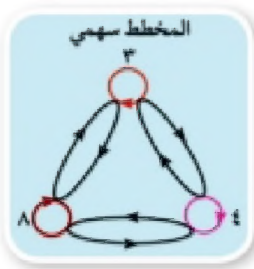


حاصل الضرب الديكارتي  $S \times V$  أو  $V \times S$

- إذا كانت  $S = \{3، 4، 8\}$

$$\text{فإن: } S \times S = \{3، 4، 8\} \times \{3، 4، 8\}$$

$$= \{(3، 3)، (3، 4)، (3، 8)، (4، 3)، (4، 4)، (4، 8)، (8، 3)، (8، 4)، (8، 8)\}$$





## عدد العناصر: يرمز له بالرمز ن

- ◆ إذا كانت  $S = \{2, 5\}$  فإن عدد عناصر  $S = 2$  وتكتب  $N(S) = 2$
- ◆ إذا كانت  $S = \{4\}$  فإن  $N(S) = 1$  وليس 4

$$N(S \times V) = N(S) \times N(V) \text{ القاعدة:}$$

فمثلاً: إذا كانت  $N(S) = 4$  ،  $N(V) = 5$  فإن  $N(S \times V) = 4 \times 5 = 20$   
 أيضاً: إذا كانت  $S = \{1, 3\}$  ،  $V = \{2, 4, 6\}$  فإن  $N(S \times V) = 2 \times 3 = 6$

## العمليات على المجموعات

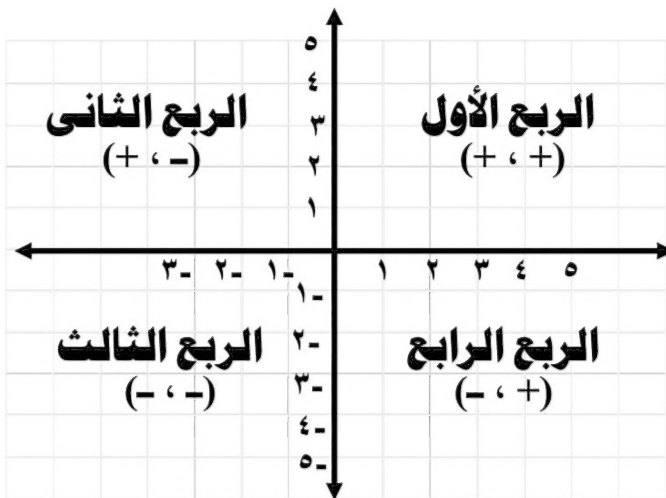
إذا كانت  $S = \{2, 3\}$  ،  $V = \{3, 4, 5\}$  فإن:

- ◆ **التقاطع  $\cap$**  :  $S \cap V = \{3\}$  ← خذ المكرر
- ◆ **الاتحاد  $\cup$**  :  $S \cup V = \{2, 3, 4, 5\}$  ← خذ الكل ، والمكرر مرة واحدة
- ◆ **الفرق  $-$**  :  $S - V = \{2\}$  ← خذ الموجود في  $S$  ومش موجود في  $V$
- ◆  $V - S = \{4, 5\}$  ← خذ الموجود في  $V$  ومش موجود في  $S$

## الشبكة التربيعية المتعامدة

- تنقسم الشبكة التربيعية إلى 4 أرباع ومحور سينات ومحور صادات
- يمكن التعرف على الربع الذي تقع فيه أي نقطة من إشارتي إحداثيها كما بالشكل.
- إذا كان الإحداثي السيني = صفر فإن النقطة تقع على محور الصادات مثل  $(0, 3)$
- إذا كان الإحداثي الصادي = صفر فإن النقطة تقع على محور السينات مثل  $(2, 0)$

### مثال



- ❖ النقطة  $(2, 5)$  تقع في الربع الأول
- ❖ النقطة  $(3, -2)$  تقع في الربع الثاني
- ❖ النقطة  $(-4, -3)$  تقع في الربع الثالث
- ❖ النقطة  $(3, -1)$  تقع في الربع الرابع
- ❖ النقطة  $(2, 0)$  تقع على محور الصادات
- ❖ النقطة  $(0, 4)$  تقع على محور السينات
- ❖ النقطة  $(0, 0)$  تسمى نقطة الأصل "و"

### تدريب

- ◆ النقطة  $(-6, 5)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(2, 3)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(-2, 0)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(-4, -7)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(4, 3)$  تقع .....
- ◆ النقطة  $(0, 5)$  تقع .....



١

إذا كانت  $س \times ص = \{(٧,٢), (٥,٢), (٢,٢)\}$   
أوجد : (١)  $ص$  (٢)  $س \times ص$   
(٣)  $ن (ص)$

الحل

$$ص = \{٧, ٥, ٢\}$$

$$س \times ص = \{(٢,٧), (٢,٥), (٢,٢)\}$$

$$ن (ص) = ٣ \times ٣ = ٩$$

٢

إذا كانت  $س = \{٤, ٣\}$  ،  $ص = \{٥, ٤\}$   
ع ،  $\{٥, ٦\}$  فأوجد :  
(١)  $س \times (ص \cap ع)$  (٢)  $(س - ص) \times ع$

الحل

التجهيز:  $(ص \cap ع) = \{٥\}$  ،  $س - ص = \{٣\}$

$$س \times (ص \cap ع) = \{٥\} \times \{٤, ٣\} = \{(٥, ٤), (٥, ٣)\}$$

$$(س - ص) \times ع = \{٣\} \times \{٥, ٦\} = \{(٣, ٥), (٣, ٦)\}$$

٣

إذا كانت  $س = \{٥, ٢\}$  ،  $ص = \{٢, ١\}$   
ع ،  $\{٣\}$  فأوجد :  
(١)  $ن (س \times ص)$  (٢)  $(ص \cap س) \times ع$

الحل

$$ن (س \times ص) = ن (س) \times ن (ص) = ٢ \times ١ = ٢$$

$$\{٢\} = (ص \cap س) \text{ التجهيز: } (ص \cap س)$$

$$(ص \cap س) \times ع = \{٢\} \times \{٣\} = \{(٢, ٣)\}$$

٤

إذا كانت  $س = \{٦, ٥, ١\}$  ،  $ص = \{٥, ٤, ٢\}$   
فأوجد : (١)  $س \times ص$  ومثله بمخطط سهمي  
(٢)  $ن (س \times ص)$

الحل

$$س \times ص = \{(١, ٢), (٥, ٢), (٦, ٢), (١, ٤), (٥, ٤), (٦, ٤), (١, ٥), (٥, ٥), (٦, ٥)\}$$

مثل المخطط بنفسك

$$ن (س \times ص) = ن (س) \times ن (ص) = ٣ \times ٣ = ٩$$

٥

إذا كانت  $س = \{٣, ٢\}$  ،  $ص = \{٥, ٤, ٣\}$   
فأوجد : (١)  $س \times ص$   
(٢)  $(س \times ص) \cap ص$

الحل

$$س \times ص = \{(٣, ٢), (٤, ٢), (٥, ٢), (٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣)\}$$

$$ص \times ص = \{(٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣), (٣, ٤), (٤, ٤), (٥, ٤), (٣, ٥), (٤, ٥), (٥, ٥)\}$$

$$(س \times ص) \cap (ص \times ص) = \{(٣, ٣), (٤, ٣), (٥, ٣)\}$$

## العلاقة ع

- العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي س × ص.
- يتم اختيار أزواج بيان العلاقة من أزواج الضرب الديكارتي حسب شرط معين يعطى لك في المسألة
- المقصود بجملة أ ع ب : أي علاقة أ ، ب حيث أ هي المسقط الأول ، ب هي المسقط الثاني في الأزواج المرتبة
- إذا كانت العلاقة من س إلى ص : فإن المسقط الأول س ، المسقط الثاني ب ص

### تدريب

إذا كانت س = { ٥ ، ٣ ، ٢ } ،  
ص = { ١٠ ، ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٣ } وكانت ع علاقة  
من س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  ب  
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

### الحل

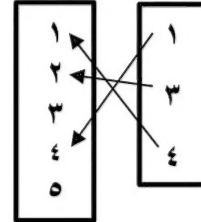
اختر الأزواج التي فيها المسقط الأول نصف الثاني  
بيان ع =

### مثال ١

إذا كانت س = { ٤ ، ٣ ، ١ } ،  
ص = { ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ } وكانت ع علاقة من  
س إلى ص حيث أ ع ب تعني أن  $٥ = ٤ + ١$   
اكتب بيان ع ومثلها بمخطط سهمي

إعمل س × ص في دماغك واختار منها الأزواج التي  
ينطبق عليها الشرط  $٥ = ٤ + ١$  يعني المسقط الأول +  
المسقط الثاني = ٥

بيان ع = { (١،٤) ، (٢،٣) ، (٤،١) }



## متي تكون العلاقة دالة ؟!

- ◆ يمكن أن تكون العلاقة دالة ويمكن أن تكون ليست دالة، فكل دالة هي علاقة وليست كل علاقة دالة.
- ◆ يقال لعلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص أنها دالة إذا تحقق الآتي:
- ❖ إذا ظهر كل عنصر من عناصر س كمسقط أول مرة واحدة فقط (في بيان ع)
- ❖ أو إذا خرج من كل عنصر من عناصر س سهم واحد فقط (في المخطط السهمي)
- ◆ إذا كانت العلاقة دالة فإن الدالة لها مدى: ومدى الدالة هو عناصر المسقط الثاني في بيان العلاقة
- إذا كانت العلاقة ليست دالة فإنه ليس لها مدى

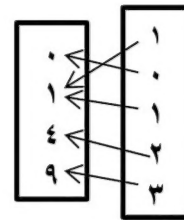


١

إذا كانت  $S = \{3, 2, 1, 0, -1\}$  وكانت  $E = \{9, 6, 4, 1, 0\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A = 2B$ " اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي، وهل ع دالة أم لا، ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها.

الحل

بيان  $E = \{(9, 3), (6, 2), (4, 1), (0, 0), (1, -1)\}$



• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.  
أو لأن كل عنصر من  $S$  ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط.

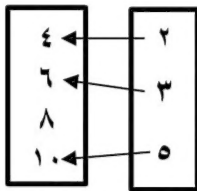
• المدى  $= \{9, 4, 1, 0\}$

٢

إذا كانت  $S = \{5, 3, 2\}$  وكانت  $E = \{10, 8, 6, 4\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A = 2B$ " اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان  $E = \{(10, 5), (6, 3), (4, 2)\}$



• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.

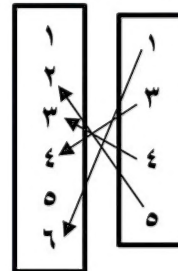
• المدى  $= \{10, 6, 4\}$

٣

إذا كانت  $S = \{5, 4, 3, 1\}$  وكانت  $E = \{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A = B + 1$ " اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

الحل

بيان  $E = \{(2, 5), (3, 4), (4, 3), (6, 1)\}$



• ع دالة

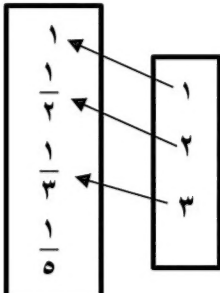
• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.

• المدى  $= \{6, 5, 4, 3, 2\}$

٤

إذا كانت  $S = \{3, 2, 1\}$  وكانت  $E = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$  وكانت ع علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن العدد  $A$  هو المعكوس الضربي للعدد  $B$  اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي (١) بين أن ع دالة واكتب مداها (٢)

بيان  $E = \{(\frac{1}{3}, 3), (\frac{1}{2}, 2), (1, 1)\}$



• ع دالة

• لأن كل عنصر من  $S$  خرج منه سهم واحد فقط.

• المدى  $= \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$

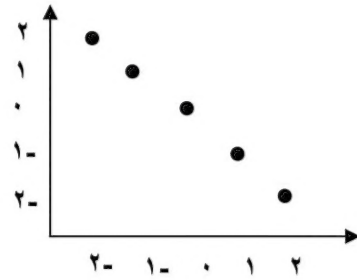


٥

إذا كانت  $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  وكانت  $E$  علاقة معرفة على  $S$  حيث  $A \in B$  تعني أن العدد  $A$  معكوس جمعي للعدد  $B$  اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط بياني هل  $E$  دالة أم لا؟ ولماذا؟ وإذا كانت دالة اكتب مداها

الحل

بيان  $E = \{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)\}$



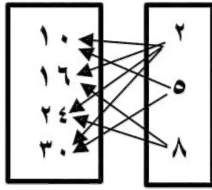
- $E$  دالة
- لأن كل عنصر من  $S$  ظهر في بيان  $E$  كمسقط أول مرة واحدة فقط.
- المدى  $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

٦

إذا كانت  $S = \{2, 5, 8\}$ ،  $V = \{10, 16, 24, 30\}$  وكانت  $E$  علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A$  عامل من عوامل  $B$ " لكل  $A \in S$ ،  $B \in V$  اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي. هل  $E$  دالة؟ ولماذا؟

الحل

بيان  $E = \{(2, 10), (2, 16), (2, 24), (2, 30), (5, 10), (5, 16), (5, 24), (5, 30), (8, 24), (8, 30)\}$



- $E$  ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من  $S$  خرج منه أكثر من سهم.
- لاحظ هنا أنه لا يوجد مدى لأن العلاقة ليست دالة.

٧

إذا كانت  $S = \{1, 3, 5\}$  وكانت  $E$  علاقة معرفة على  $S$  وكان بيان  $E = \{(1, 5), (3, 1), (5, 3)\}$  أوجد مدى الدالة (١) أوجد القيمة العددية للمقدار  $A + B$  (٢)

الحل

مدى الدالة هو الأرقام الموجودة في المسقط الثاني

المدى  $= \{1, 3, 5\}$

العلاقة دالة يبقى لازم كل عنصر من  $S$  يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط ..  
العنصر ١ ظهر يبقى أ، ب هما ٣، ٥

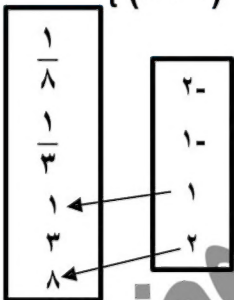
$$A + B = 3 + 5 = 8$$

٨

إذا كانت  $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ ،  $V = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{3}, 1, 3\}$  وكانت  $E$  علاقة من  $S$  إلى  $V$  حيث  $A \in B$  تعني أن " $A = \frac{1}{B}$ " اكتب بيان  $E$  ومثلها بمخطط سهمي، وهل  $E$  دالة أم لا، ولماذا؟

الحل

بيان  $E = \{(-2, \frac{1}{2}), (-1, 1), (1, -1), (2, \frac{1}{2})\}$



- $E$  ليست دالة
- لأنه يوجد عنصر من  $S$  لم يخرج منه سهم.

## الدالة

- يرمز للدالة بالرمز  $d$  أو  $r$  أو  $q$
- إذا كانت دالة من  $S$  إلى  $V$  فإنها تكتب  $d: S \rightarrow V$  ويكون:
- المجال: هو عناصر المجموعة  $S$
- المجال المقابل: هو عناصر المجموعة  $V$
- المدى: هو مجموعة صور عناصر المجال (وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل)
- قاعدة الدالة: تكون مثل:  $d(S) = S^2$  ،  $d(S) = S + 1$  ،  $d(S) = S^2 + 2S - 3$  وهكذا
- لاحظ أن:  $d(S)$  هي نفسها  $V$  أي أن:  $d(S) = V$

### مثال ١

إذا كانت  $d: S \rightarrow V$  ،  $S = \{3, 5, 7\}$  ،  $V = \{9, 12, 15, 21\}$  ،  
بيان  $d = \{(3, 9), (5, 15), (7, 21)\}$   
فأوجد : ١- مجال الدالة ٢- المجال المقابل  
٣- مدى الدالة ٤- قاعدة الدالة

### الحل

- ١- مجال الدالة  $= \{3, 5, 7\}$
- ٢- المجال المقابل  $= \{9, 12, 15, 21\}$
- ٣- مدى الدالة  $= \{9, 15, 21\}$
- ٤- قاعدة الدالة هي:  $d(S) = 3S$

### مثال ٢

إذا كان بيان الدالة  $d = \{(1, 3), (2, 5)\}$  ،  
 $\{(3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$  ،  
فأوجد : ١- مجال ومدى الدالة  
٢- قاعدة الدالة

- ♦ مجال الدالة  $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ♦ مدى الدالة  $= \{3, 5, 7, 9, 11\}$
- ♦ قاعدة الدالة هي:  $d(S) = S^2 + 1$

## ملاحظات على التعويض في الدالة

- عند التعويض عن عدد سالب في  $S^2$  نضع العدد بين قوسين فمثلاً إذا كانت  $S = -3$  فإن  $S^2 = (-3)^2 = 9$
- يمكن التعويض في قاعدة الدالة عن قيمة  $S$  أو قيمة  $V$  أو كلاهما ويمكن الاستعانة بالآتي:
- ١ إذا كان  $(2, 5)$  ينتمي لبيان الدالة: فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن  $S = 2$  ،  $d(S) = 5$  أو  $V = 5$
- ٢ إذا كان  $d(3) = 7$  فإننا نعوض في قاعدة الدالة عن  $S = 3$  ،  $d(S) = 7$  أو  $V = 7$

## مسائل على التعويض في الدالة

١

إذا كانت د(س) = ٤س + ب وكان د(٣) = ١٥  
أوجد قيمة ب

**الحل**

د(٣) = ١٥ معناها انك لما تعوض في الدالة عن  
س = ٣ الناتج هيساوى ١٥  
 $١٥ = ٤ \times ٣ + ب$   
 $١٥ = ١٢ + ب \therefore ب = ٣$

٢

إذا كانت النقطة (أ، ٣) تقع على الخط المستقيم  
الممثل للدالة د : ح ← ح حيث د(س) = ٤س - ٥  
فأوجد قيمة أ

**الحل**

من الزوج (أ، ٣) نأخذ س = ٣ ، د(س) = ٣  
بالتعويض في الدالة  
 $٣ = ٤ - أ$   
 $٤ - أ = ٣ \rightarrow ٤ - ٣ = أ$   
 $١ = أ$

٣

إذا كانت د(س) = ٣س - ٢ ، ر(س) = ٣ - س  
فأوجد د(٢) + ر(٢)

**الحل**

د(٢) = (٢) (٢) = ٢(٢) - ٢ = ٢  
ر(٢) = (٢) (٢) = ٣ - ٢ = ١  
د(٢) + ر(٢) = ٢ + ١ = ٣

٤

إذا كان المستقيم الممثل للدالة د : ح ← ح حيث  
د(س) = ٦س - أ يقطع محور الصادات في النقطة  
(ب، ٣) فأوجد قيمتى أ، ب

**الحل**

المستقيم يقطع محور الصادات ب = ٠  
من الزوج (ب، ٣) نعوض عن س = ٠ ، ص = ٣  
 $٣ = ٦ \times ٠ - أ$   
 $٣ = -أ \rightarrow أ = -٣$

٥

إذا كانت س = {٠، ١، ٣} ، ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧، ٨}  
وكانت د : س ← ص حيث د(س) = ٥ - س  
فأوجد صور عناصر س بالدالة د .

**الحل**

لإيجاد صور عناصر س نعوض في الدالة عن قيم س  
د(٠) = ٥ - ٠ = ٥  
د(١) = ٥ - ١ = ٤  
د(٣) = ٥ - ٣ = ٢  
 $\therefore$  صور عناصر س (هي المدى) = {٢، ٤، ٥}

**الحل**

نعوض في الدالة د(س) = ٩ - س عن قيم المجموعة س  
د(٢) = ٩ - ٢ = ٧  
د(٣) = ٩ - ٣ = ٦  
د(٤) = ٩ - ٤ = ٥  
بيان د = {(٢، ٧)، (٣، ٦)، (٤، ٥)}  
المدى = {٥، ٦، ٧}



◆ الدالة كثيرة الحدود هي دالة تتكون من حد أو أكثر ويجب توافر شرطان لتكون كثيرة حدود وهما:

١ كل من المجال والمجال المقابل للدالة هو ح

٢ أسس المتغير  $s$  و  $t$  ، أي لا يوجد بالدالة كثيرة الحدود جذر أو مجهول في المقام أو أس سالب

◆ أمثلة لدوال كثيرات حدود:

مثل:  $(s) = s^2 + 1$  ،  $(s) = s^3 + 2s - 2$  ،  $(s) = s^3 - 8$

◆ أمثلة لدوال ليست كثيرات حدود :

مثل:  $(s) = s^2 + \sqrt{s} + 8$  ،  $(s) = s(s + \frac{1}{s} + 2)$

### درجة الدالة

هي درجة أكبر أس في الدالة (بعد التبسيط)

- الدالة د:  $(s) = s^4 + 2s^3 + 5$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الرابعة
- الدالة د:  $(s) = s^2 + 2s - 1$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية (تسمى دالة تربيعية)
- الدالة د:  $(s) = s + 3$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى (تسمى دالة خطية)
- الدالة د:  $(s) = 7$  دالة كثيرة حدود من الدرجة الصفرية (تسمى دالة ثابتة)

مثال ١: الدالة د:  $(s) = s^2(s + 2)$  دالة كثيرة حدود من الدرجة .....

الحل: نبسط الدالة فتكون:  $(s) = s^3 + 2s^2$  ∴ دالة من الدرجة الثالثة

مثال ٢: الدالة د:  $(s) = s^2 - (s^3 - 1 + s)$  دالة كثيرة حدود من الدرجة .....

الحل: نبسط الدالة فتكون:  $(s) = s^2 - s^3 + 1 - s = -s^3 + s^2 - s + 1$  ∴ دالة من الدرجة الأولى

مثال ٢: إذا كانت  $(s) = 2s^2 - 5s + 2$  (١) اذكر درجة الدالة د (٢) اثبت أن د (٢) = د ( $\frac{1}{2}$ )

الحل

■ الدالة د من الدرجة الثانية

■ د (٢) =  $2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 2$  صفر

د ( $\frac{1}{2}$ ) =  $2 \times (\frac{1}{2})^2 - 5 \times (\frac{1}{2}) + 2 = 2 + \frac{1}{2} \times 5 - \frac{1}{2} = 2$  صفر

∴ د (٢) = د ( $\frac{1}{2}$ )

مثال ١: إذا كان  $(s) = s^2 - 3s + 3$  فأوجد: د (٢-) ، د (٠) ، د ( $\sqrt[3]{3}$ )

الحل

عوض ثم استعن بالآلة الحاسبة

د (٢-) =  $(2-) = 2 - 3 + 3 = 2$

د (٠) =  $0 - 0 + 3 = 3$

د ( $\sqrt[3]{3}$ ) =  $3 + 3\sqrt[3]{3} - 3 = 3\sqrt[3]{3}$

$3\sqrt[3]{3} - 12 = 3 + 3\sqrt[3]{3} - 9 =$

♦ الدالة الخطية هي دالة من الدرجة الأولى

مثل: د(س) = ٢س ، د(س) = س - ١ ، د(س) = ٥س + ٣

♦ تكون على الصورة د(س) = أس + ب حيث  $أ \neq ٠$  وتمثل بيانيا بخط مستقيم بحيث يكون:

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، ب)

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي  $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$

فمثلا: إذا كانت د(س) = ٢س - ٥ فإن أ = ٢ ، ب = -٥ ومنها فإن:

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات هي (٠ ، -٥)

➤ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي  $(٠ ، \frac{٥}{٢})$

♦ وبطريقة أخرى يمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات بالتعويض عن س = ٠ ونقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات بالتعويض عن ص = ٠

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور السينات ← نفهم أن المسقط الثانى ص = صفر

❖ إذا كان المستقيم الممثل للدالة يقطع محور الصادات ← نفهم أن المسقط الأول س = صفر

مثال

مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣س - ١  
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

الحل

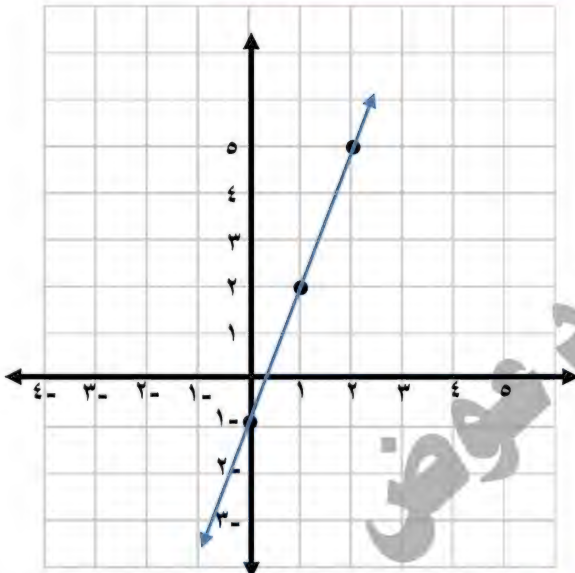
في الدالة الخطية نفرض أى ٣ قيم لـ س

س	٣س - ١	ص
٠	٣ × ٠ - ١	-١
١	٣ × ١ - ١	٢
٢	٣ × ٢ - ١	٥

من قاعدة الدالة: أ = ٣ ، ب = -١

∴ نقطة التقاطع مع محور السينات  $(٠ ، -\frac{ب}{أ})$  هي  $(٠ ، \frac{١}{٣})$

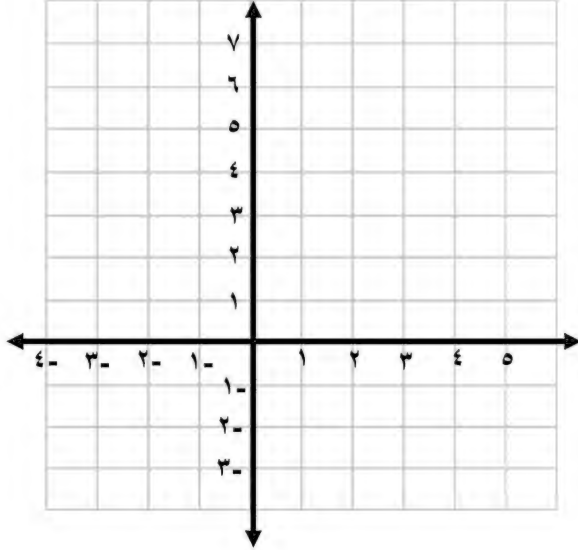
، نقطة التقاطع مع محور الصادات (ب ، ٠) هي (٠ ، -١)



### تدريب ١

مثل بيانيا الدالة د:  $د(س) = ٢ - س - ٣$   
وأوجد نقطة تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

### الحل



س	$٢ - س - ٣$	ص

### الدالة الثابتة

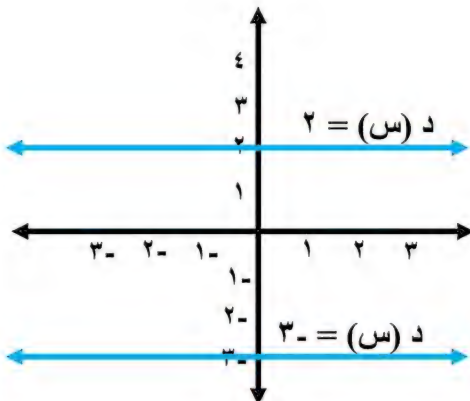
❖ الدالة د:  $ح ← ح$  حيث د(س) = ب ، ب د ح تسمى دالة ثابتة وهى من الدرجة الصفرية

مثل: د(س) = ٧ ، د(س) = ٥ ، د(س) = ٢ وهكذا

❖ إذا كانت د(س) = ٥ فإن د(١) = ٥ ، د(٥) = ٥ ، د(٥-) = ٥ ، د(٠) = ٥ وهكذا

فمثلا: إذا كانت د(س) = ٧ فإن د(٣) + د(٣-) = ٧ + ٧ = ١٤

❖ الدالة الثابتة تمثل بيانيا بخط مستقيم يوازي محور السينات



### الحل

♦ مثال ١: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٢

♦ مثال ٢: مثل بيانيا الدالة د(س) = ٣-



❖ الدالة التربيعية هي دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية

❖ الدالة د: ح حيث  $د(س) = أس^2 + ب س + ج$  تسمى دالة تربيعية

مثل:  $د(س) = س^2$  ،  $د(س) = -س^2$  ،  $د(س) = س^2 - ٥$  ،  $د(س) = س^2 - ٢ س + ١$

## ملاحظات هامة

❶ إذا كان معامل  $س^2$  موجب فإن المنحنى يكون مفتوح لأعلى وله قيمة صغرى

❷ إذا كان معامل  $س^2$  سالب فإن المنحنى يكون مفتوح لأسفل وله قيمة عظمى

❸ رأس المنحنى: تحدد من الرسم أو من قاعدة الدالة  $د(س) = أس^2 + ب س + ج$  بالقانون:

$$\text{نقطة رأس المنحنى} = \left( -\frac{ب}{٢أ} , -\frac{ب^2 - ٤أج}{٤أ} \right)$$

❹ من نقطة رأس المنحنى نأخذ:

- قيمة س هي معادلة محور التماثل
- قيمة ص هي القيمة العظمى أو الصغرى

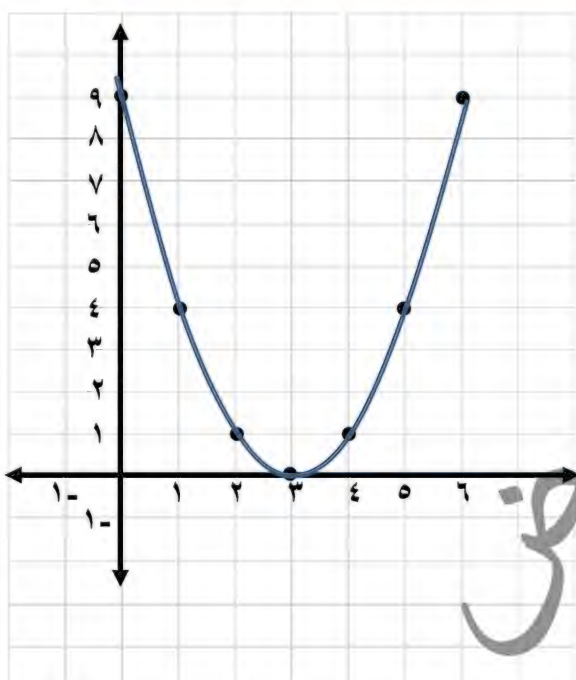
## مثال ١

مثل بيانها الدالة  $د(س) = (س - ٣)^2$  متخذاً س  $∈ [٠, ٦]$

ومن الرسم استنتج:

(١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

## الحل



س	$د(س) = (س - ٣)^2$	ص
٠	$(٣ - ٠)^2$	٩
١	$(٣ - ١)^2$	٤
٢	$(٣ - ٢)^2$	١
٣	$(٣ - ٣)^2$	٠
٤	$(٣ - ٤)^2$	١
٥	$(٣ - ٥)^2$	٤
٦	$(٣ - ٦)^2$	٩

رأس المنحنى  $(٣, ٠)$

معادلة محور التماثل  $س = ٣$

القيمة الصغرى  $٠$

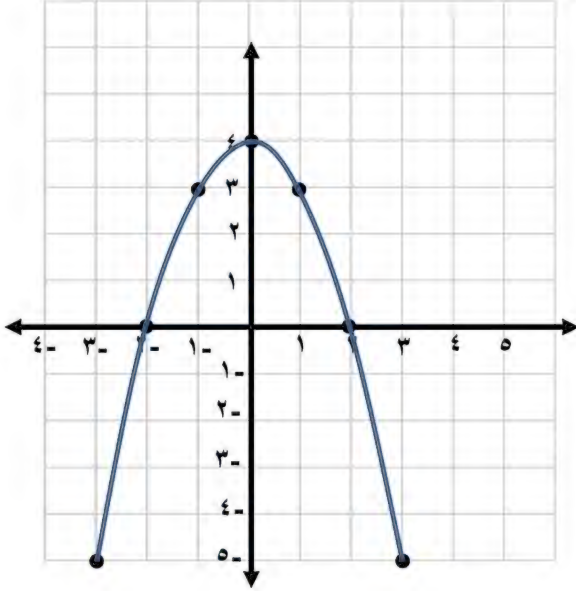
مثال ٢

مثل بيانيا الدالة  $د(س) = ٤ - س^٢$  متخذًا  $س \in [-٣, ٣]$

ومن الرسم استنتج :

(٢) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



س	$٤ - س^٢$	ص
٣-	$٤ - (٣-)^٢$	٥-
٢-	$٤ - (٢-)^٢$	٠
١-	$٤ - (١-)^٢$	٣
٠	$٤ - (٠)^٢$	٤
١	$٤ - (١)^٢$	٣
٢	$٤ - (٢)^٢$	٠
٣	$٤ - (٣)^٢$	٥-

رأس المنحنى  $(٤, ٠) =$

معادلة محور التماثل  $س = ٠$

القيمة العظمى  $= ٤$

معلم أول رياضيات  
م.م. محمود عوض حسن

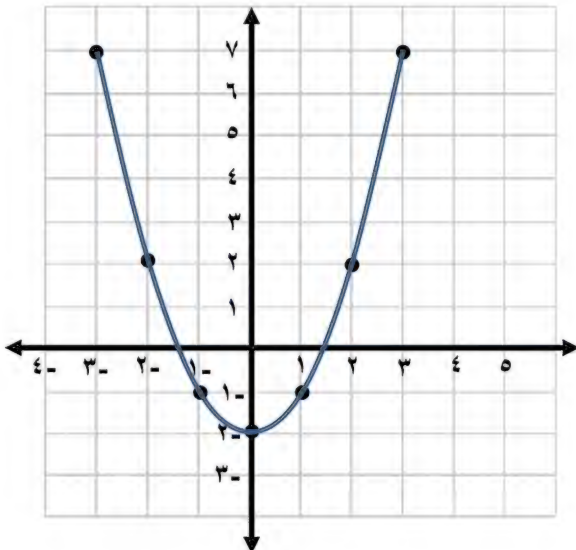
مثال ٣

مثل بيانيا الدالة  $د(س) = ٢ - س^٢$  متخذًا  $س \in [-٣, ٣]$

ومن الرسم استنتج :

(٣) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل

الحل



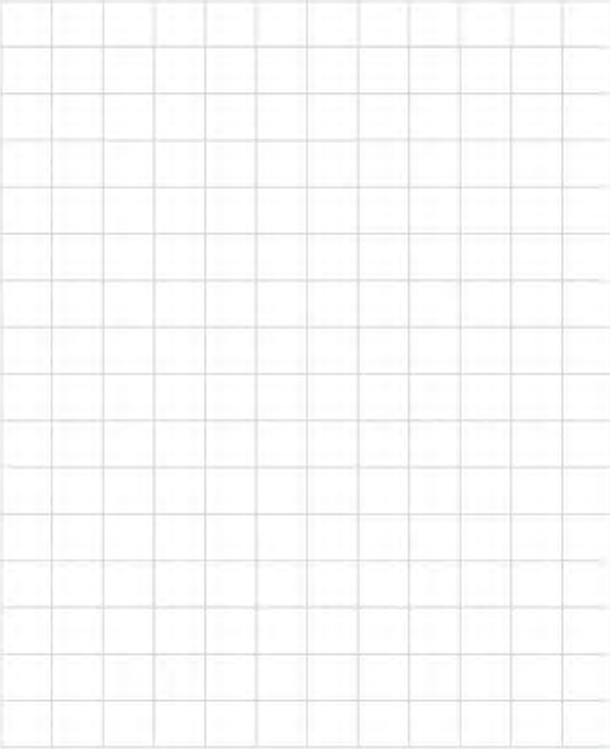
س	$٢ - س^٢$	ص
٣-	$٢ - (٣-)^٢$	٧
٢-	$٢ - (٢-)^٢$	٢
١-	$٢ - (١-)^٢$	١-
٠	$٢ - (٠)^٢$	٢-
١	$٢ - (١)^٢$	١-
٢	$٢ - (٢)^٢$	٢
٣	$٢ - (٣)^٢$	٧

رأس المنحنى  $(٢-, ٠) =$

معادلة محور التماثل  $س = ٠$

القيمة الصغرى  $= ٢-$

**تدريب ١** مثل بيانيا الدالة  $(س) = س^2 + ٢س + ١$  متخذاً  $س \in [-٤, ٢]$  ومن الرسم استنتج :  
 (١) نقطة رأس المنحنى (٢) القيمة الصغرى أو العظمى (٣) معادلة محور التماثل



س	$س^2 + ٢س + ١$	ص

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =

معلم أول رياضيات  
 محمد عبد الحليم

**تدريب ٢** مثل بيانيا الدالة  $(س) = س^2 - ٣س$  متخذاً  $س \in [-٣, ٣]$  ومن الرسم استنتج :  
 (١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى



س	$س^2 - ٣س$	ص
-٣	-٩	

رأس المنحنى =

معادلة محور التماثل:

القيمة الصغرى =



## أسئلة اختر على الوحدة الأولى

- ١ إذا كان  $(٢، س - ١) = (ص، ٠)$  فإن  $س + ص =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣-
- ٢ إذا كانت  $(س - ١، ١١) = (٨، ص + ٣)$  فإن  $\sqrt{س + ٢} =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ٥ (ج) ٩ (د) ٢٥
- ٣ إذا كان  $(٥، ٣) \in \{٣، ٦\} \times \{س، ٨\}$  فإن  $س =$  .....  
 (أ) ٨ (ب) ٦ (ج) ٥ (د) ٣
- ٤ النقطة  $(٣-، ٤)$  تقع في الربع .....  
 (أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع
- ٥ إذا كانت  $س = \{٢\}$ ،  $ص = \{٣\}$  فإن  $س \times ص =$  .....  
 (أ) ٦ (ب)  $\{٣\}$  (ج)  $(٣، ٢)$  (د)  $\{(٣، ٢)\}$
- ٦ إذا كان  $ن(س) = ٣$ ،  $ن(س \times ص) = ١٢$  فإن  $ن(ص) =$  .....  
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ٣٦
- ٧ إذا كان  $ن(س) = ٢$ ،  $ن(ص \times س) = ٦$  فإن  $ن(ص) =$  .....  
 (أ) ٤ (ب) ٩ (ج) ١٦ (د) ١٢
- ٨ إذا كانت  $ن(س) = ٩$  فإن  $ن(س) =$  .....  
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ١٢
- ٩ إذا كانت النقطة  $(س - ٢، ٤ - س)$  تقع في الربع الثالث فإن  $س =$  .....  
 (أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٦
- ١٠ إذا كانت النقطة  $(٥، ب - ٧)$  تقع على محور السينات فإن  $ب =$  .....  
 (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢
- ١١ إذا كانت  $د(س) = ٧$  فإن  $د(٣-) =$  .....  
 (أ) ٧ (ب) ٧- (ج) ٢١ (د) ٢١-
- ١٢ الدالة  $د: د(س) = ٣$  س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة .....  
 (أ)  $(٠، ٣)$  (ب)  $(٠، ٠)$  (ج)  $(٠، ٣)$  (د)  $(٣، ٣)$

نص  
مدموعوش  
معلم أول رياضيات

### الحل

- المنحنى يمر بالنقطة  $(٤، ٠)$  بالتعويض في الدالة  
 $\therefore ٤ = م - ٢٠ \therefore م = ٢٤$
- إحداثي ب هو  $(س، ٠)$  بالتعويض في الدالة  
 $\therefore ٠ = م - ٤ = ٢٤ - ٤ \therefore س = ٢ \pm$   
 $\therefore$  إحداثي ب  $(٠، ٢)$ ، إحداثي ج  $(٠، ٢-)$
- مساحة المثلث  $= \frac{1}{2} \times \text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}$   
 $= \frac{1}{2} \times ٤ \times ٨ = ١٦$  وحدات مربعة

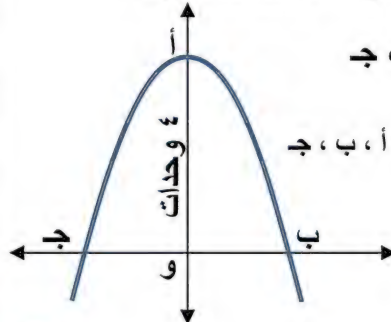
### متفوقين

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = م - س<sup>٢</sup> فإذا كان أ و ٤ وحدات فأوجد:

(١) قيمة م (٢) إحداثي ب، ج

(٣) مساحة المثلث الذي رؤوسه أ، ب، ج



# واجب على الوحدة الأولى

الدالة	حاصل ضرب الديكارتى
<b>١</b> إذا كان بيان الدالة $D = \{(3,1), (5,2), (7,3)\}$ ، $\{(9,4), (11,5)\}$ ، (١) اكتب مجال ومدى الدالة د (٢) اكتب قاعدة الدالة	<b>١</b> إذا كانت $(س - ١, ٢٩) = (٤, ص + ٢ + ١)$ فأوجد قيمة $س + ٢$ ص
<b>٢</b> إذا كانت د $(س) = س^٢ - ٣س$ ، $ر (س) = س - ٣$ (١) أوجد د(٢) + ر(٢) (٢) اثبت أن د (٣) + ر (٣) = صفر	<b>٢</b> إذا كانت $س = \{١, ٢\}$ ، $ص = \{٢, ٥\}$ $ع = \{٥, ٤\}$ فأوجد: (١) $(س - ص) \times ع$ (٢) ن (٢ع)
<b>٣</b> إذا كانت الدالة د حيث د $(س) = ٥س + ٤$ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ب) فأوجد قيمة ب	<b>٣</b> إذا كانت $س \times ص = \{(٦,٢), (٩,٢), (٦,٣)\}$ ، فأوجد: (١) $س$ ، $ص$ (٢) $ص \times س$ (٣) ن (٣س)
<b>٤</b> إذا كانت د $(س) = ٣س + ب$ ، د $(٤) = ١٣$ فأوجد قيمة ب	<b>الحلاقة</b>
<b>٥</b> إذا كان المستقيم الذى يمثل الدالة د: ح ح حيث د $(س) = ٢س + أ$ ، د $(٣) = ٩$ (١) أوجد قيمة أ (٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور السيني	<b>١</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٤, ٥\}$ ، $ص = \{١, ٤, ٦\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: $أ = ٢$ ب لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) هل ع دالة أم لا؟ ولماذا؟
<b>النمثيل البيانى لدوال كثيرات الحدود</b>	<b>٢</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٣, ٤\}$ $ص = \{ص : ص \geq ٢, دط, ٩ > ص\}$ ، وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى: $(أ = \frac{١}{٢} ب)$ لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة وأوجد مداها؟
<b>١</b> مثل بيانيا الدالة د $(س) = ٢س + ١$ ثم أوجد نقط تقاطع المستقيم الممثل للدالة مع محوري الإحداثيات	<b>٣</b> إذا كانت $س = \{١, ٢, ٣\}$ ، $ص = \{١, \frac{١}{٣}, \frac{١}{٥}\}$ وكانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن $أ ب = ١$ لكل أ د س ، ب د ص (١) اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي (٢) بين أن ع دالة واكتب مداها
<b>٢</b> ارسم منحنى الدالة د: د $(س) = ٢س + ١$ متخذاً س د $[-٢, ٢]$ ومن الرسم عين: (١) نقطة رأس المنحنى (٢) معادلة محور التماثل (٣) القيمة الصغرى أو العظمى	
<b>٣</b> مثل بيانيا منحنى الدالة د $(س) = ٣ - س^٢$ حيث س د $[-٣, ٣]$ ومن الرسم أوجد: (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة العظمى أو الصغرى	



## اختبار على الوحدة الأولى

إعداد أ / محمود عوض

**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كانت النقطة (٣ ، ب - ٥) تقع على محور السينات فإن ب = .....  
 (أ) ٢ (ب) ٥ (ج) ٦ (د) ٨
- ٢ إذا كان  $\{2\} \times \{أ، ب\} = \{(٤، ٢)، (٣، ٢)\}$  فإن أ - ب = .....  
 (أ) ١ (ب) ١- (ج)  $١ \pm$  (د) صفر
- ٣ الدالة د حيث د (س) = ٥س يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة .....  
 (أ) (٥، ٠) (ب) (٥، ٥) (ج) (٠، ٥) (د) (٠، ٠)
- ٤ إذا كانت ص = { صفر } فإن ن (ص) = .....  
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٤

**السؤال الثاني:**

(أ) إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ } وكانت ع علاقة من س إلى ص  
 حيث أع ب تعنى  $أ = \frac{١}{٣} ب$  لكل أ ∈ ص ، ب ∈ ص  
 اكتب بيان ع ومثله بمخطط سهمي وبين أن ع دالة واكتب مداها.

(ب) مثل بيانيا الدالة الخطية د: ح — ح حيث د (س) = س + ٢  
 وأوجد نقط تقاطع المستقيم مع محوري الإحداثيات

**السؤال الثالث:**

- (أ) إذا كان (٤ ، ٨) = (٤ ، ٨) ، ص + ١ فأوجد قيمة  $\sqrt{٢س + ٢ص}$
- (ب) إذا كان س × ص = { (٢، ١) ، (٣، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٢) }  
 فأوجد: (١) س ∪ ص (٢) ص ∩ س

**السؤال الرابع:**

- (أ) إذا كانت الدالة د حيث د (س) = ٣س + ٤ يمثلها بيانيا خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، - ٥)  
 فأوجد: (١) د (  $\frac{٢}{٣}$  ) (٢) قيمة أ
- (ب) مثل بيانيا الدالة د حيث د (س) = س - ١ حيث س ∈ [ - ٢ ، ٢ ] ومن الرسم استنتج:  
 (١) معادلة محور التماثل (٢) القيمة الصغرى للدالة



◆ النسبة هي مقارنة بين كميتين من نفس النوع، النسبة بين أ، ب تكتب أ : ب أو  $\frac{أ}{ب}$

يسمى أ : مقدم النسبة ، ب : تالي النسبة ، أ ، ب معا : حدى النسبة

◆ النسبة لا تتغير إذا ضرب حديها في عدد حقيقي (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$$

◆ النسبة تتغير إذا أضيف أو طرح من حديها عدد حقيقي (ما عدا الصفر)

$$\text{فمثلا: } \frac{5}{7} \neq \frac{2+3}{2+5} \neq \frac{3}{5} \text{ تغيرت النسبة}$$

◆ إذا كانت النسبة بين عددين ٣ : ٤ فإننا نفرض أن العددين هما ٣م ، ٤م

٢ أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١١

فإنها تصبح ٣ : ٢

الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{2}{3} = \frac{7+س}{11+س} \text{ (مقص)}$$

$$22 + 2س = 21 + 3س$$

$$21 - 22 = 3س - 2س$$

$$-1 = س \therefore \text{العدد هو } 1$$

١ عددان صحيحان النسبة بينهما ٣ : ٧ ، إذا طرح منهما ٥

أصبحت النسبة بينهما ١ : ٣ ، أوجد العددين؟

نفرض أن العددين هما ٣م ، ٧م

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{5-3م}{5-7م} \text{ (مقص)}$$

$$5 - 7م = 15 - 9م$$

$$15 + 5 = 7م - 9م$$

$$5 = م \quad 10 = 2م$$

$$\therefore \text{العدد الأول} = 3م = 3 \times 5 = 15$$

$$\therefore \text{العدد الثانى} = 7م = 7 \times 5 = 35$$

٤ أوجد العدد الموجب الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله من

حدى النسبة  $\frac{49}{69}$  فإنها تصبح  $\frac{2}{3}$

الحل

نفرض أن العدد = س  $\therefore$  ثلاثة أمثاله = ٣س

$$\frac{2}{3} = \frac{49-3س}{69-3س} \text{ (مقص)}$$

$$3(2(69-3س) = 3(49-3س)$$

$$147 - 138 = 9س - 138$$

$$147 - 138 = 9س - 138$$

$$9 = 3س \therefore س = 3$$

٣ أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى

حدى النسبة ٥ : ١١ فإنها تصبح ٣ : ٥

الحل

نفرض أن العدد = س  $\therefore$  مربعه = ٢س

$$\frac{3}{5} = \frac{5+2س}{11+2س} \text{ (مقص)}$$

$$33 + 2س = 25 + 10س$$

$$25 - 33 = 10س - 2س$$

$$-8 = 8س \quad ٨ = ٢س$$

$$س = ٢ \therefore \text{العدد الموجب هو } ٢$$

## التناسب

◆ التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

فمثلاً:  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  يسمى تناسب والكميات أ، ب، ج، د تسمى كميات متناسبة

◆ إذا كانت أ، ب، ج، د كميات متناسبة فإن:  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  حيث:

أ: الأول المتناسب ، ب: الثانى المتناسب ، ج: الثالث المتناسب ، د: الرابع المتناسب  
أ، د: الطرفين ، ب، ج: الوسطين

## خواص التناسب

خاصية ١ حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أي أنه إذا كانت  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن:  $أ \times د = ب \times ج$

وغالباً ما تستخدم عند وجود مجهول واحد في التناسب مثل:  $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{٦}$  أو  $\frac{س - ٢}{٣ + س} = \frac{٧ + س}{١١ + س}$

تدريب

أوجد الثانى المتناسب للأعداد ٢ ، ٤ ، ٦

مثال ١

أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٤ ، ١٢ ، ١٦

الحل

نفرض أن الرابع المتناسب هو س

الكميات هي: ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س

$$\frac{١٦}{س} = \frac{٤}{١٢} \therefore$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$١٦ \times ١٢ = س \times ٤$$

$$س = \frac{١٦ \times ١٢}{٤} = ٤٨$$

∴ الرابع المتناسب هو ٤٨

## مثال ٢

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١٢ ، ٨ ، ٥ ، ٣ فإنها تكون متناسبة

## الحل

نفرض أن العدد = س

$$\frac{٨ + س}{١٢ + س} = \frac{٣ + س}{٥ + س}$$

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$٤٠ + س٨ + س٥ + س٢ = ٣٦ + س١٢ + س٣ + س٢$$

$$٤٠ + س١٣ = ٣٦ + س١٥$$

$$٣٦ - ٤٠ = س١٣ - س١٥$$

$$٢ = س \leftarrow \text{العدد هو } ٢$$

## تدريب

أوجد العدد الذي إذا أضيف إلى كل من الأعداد ١٨ ، ١٢ ، ٤ ، ٢ فإنها تكون متناسبة

## خاصية ٢

إذا كان  $أ ج = ب د$  فإن  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  في كل طرف ثبت حاجة وانقل الثانية

■ مثال ١: إذا كان  $٥ أ = ٧ ب$  فإن  $\frac{أ}{٥} = \frac{ب}{٧}$  ،

■ مثال ٢: إذا كان  $٢ س - ٣ ص = ٠$  فإن  $٢ س = ٣ ص$  ومنها  $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٢}$  ،  $\frac{٢}{٣} = \frac{ص}{س}$

🌟 تدريب: إذا كان  $٣ أ = ٤ ب$  فإن  $أ : ب = \dots\dots\dots$

## خاصية ٣

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$   $\frac{\text{مقدم}}{\text{مقدم}} = \frac{\text{تالي}}{\text{تالي}}$

■ مثال ١: إذا كانت  $أ ، ٢ ، ب ، ٩$  كميات متناسبة فإن  $\frac{أ}{٩} = \frac{ب}{٢}$  ومنها  $\frac{أ}{٩} = \frac{ب}{٢}$

■ مثال ٢: إذا كان:  $٥ أ ، ٢ س ، ٣ ب ، ٧ س$  كميات متناسبة فإن  $\frac{أ}{٧} = \frac{ب}{٣} = \dots\dots\dots$

الحل:  $\frac{٥ أ}{٧ س} = \frac{٣ ب}{٢ س} \leftarrow \frac{٥ أ}{٧ س} = \frac{٣ ب}{٢ س} \therefore \frac{٢}{٧} = \frac{٣}{٥} \therefore \frac{٢}{٣٥} = \frac{٣ \times ٢}{٥ \times ٧} = \frac{٦}{٣٥}$

🌟 تدريب: إذا كان:  $أ ، ٢ ص ، ب ، ٣ ص$  كميات متناسبة فإن  $أ : ب = \dots\dots\dots$



## خاصية ٤

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $أ = ج م$  ،  $ب = د م$

♦ أي أن : إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$  ومنها  $أ = ج م$  ،  $ب = د م$  يمكن أيضا استنتاج أن :  $أ = ب م$  ،  $ج = د م$  ولو استخدمت أي استنتاج منهم صح

♦ إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٥}$  فإن :  $أ = ٣ م$  ،  $ب = ٥ م$  ومن الخطأ أن تقول  $أ = ٣$  ،  $ب = ٥$  وتنسى الثابت

♦ إذا كان  $\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}$  فإن :  $س = ٣ م$  ،  $ص = ٤ م$  ،  $ع = ٥ م$



## ملاحظات

١ للتسهيل هتلقى خطوة العامل المشترك في حالتين:

- إذا كانت الحدود مضروبة : مثل  $ج م \times ج$  فقط اضرب فتكون  $ج^٢ م$
- إذا كانت الحدود متشابهة : مثل  $١٠ م + ١٢ م$  فقط اجمع فتكون  $٢٢ م$

٢ عند التعويض: إذا كان  $أ = ب م$  فإن  $أ^٢ = ب^٢ م$  (ربع ب ، م)

٣ لإثبات أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة نثبت أن  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  (استخدم المقص في البداية)

٤ لو هتختصر حاجة في البسط مع حاجة في المقام لازم الاتنين يكونوا مضروبين وغير مرتبطين بجمع أو طرح

مثال ١

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م \quad أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د} = \frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

$$\frac{٢ - م٣}{٣ + م٥} = \frac{(٢ - م٣)}{(٣ + م٥)} =$$

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د} = \frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

$$\frac{٢ - م٣}{٣ + م٥} = \frac{(٢ - م٣)}{(٣ + م٥)} =$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٢

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في كميات متناسبة

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$$

$$أ = ج م ، ب = د م$$

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د} = \frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

$$\frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د} = \frac{أ - ٣}{٣ + أ} = \frac{ب - ٢}{٢ + ب} = \frac{ج - ١}{١ + ج} = \frac{د - ٢}{٢ + د}$$

$$\frac{٢ - م٣}{٣ + م٥} = \frac{(٢ - م٣)}{(٣ + م٥)} =$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٣

إذا كانت س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ٥

$$\frac{١}{٢} = \frac{ع - ٢}{ع + ٢} = \frac{ص - ٣}{ص + ٣} = \frac{س - ٤}{س + ٤}$$

الحل

$$س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ٥$$

$$\frac{ع - ٢}{ع + ٢} = \frac{ص - ٣}{ص + ٣} = \frac{س - ٤}{س + ٤} = \frac{ع - ٢}{ع + ٢} = \frac{ص - ٣}{ص + ٣} = \frac{س - ٤}{س + ٤} = \frac{ع - ٢}{ع + ٢} = \frac{ص - ٣}{ص + ٣} = \frac{س - ٤}{س + ٤}$$

$$\frac{٥ - ٢}{٥ + ٢} = \frac{٤ - ٣}{٤ + ٣} = \frac{٣ - ٤}{٣ + ٤} = \frac{٥ - ٢}{٥ + ٢} = \frac{٤ - ٣}{٤ + ٣} = \frac{٣ - ٤}{٣ + ٤} = \frac{٥ - ٢}{٥ + ٢} = \frac{٤ - ٣}{٤ + ٣} = \frac{٣ - ٤}{٣ + ٤}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{٥ - ٨}{٥ + ٨ - ٩} =$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤

إذا كانت س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ٥

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

الحل

$$س = ٣ ، ص = ٤ ، ع = ٥$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

$$\sqrt{٣س٣ + ٣ص٣ + ٣ع٣} = ١٠$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٥

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{د} \quad \text{فأثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = م$$

$$أ = ج \cdot م \quad ، \quad ب = د \cdot م$$

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{د} = \frac{ج \cdot م}{د \cdot م} = \frac{ج}{د}$$

$$\frac{ج}{ب} = \frac{أ}{د} = \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د} = \frac{ج}{د}$$

مثال ٦

إذا كانت  $\frac{س}{ص} = \frac{٢}{٣}$  فأوجد قيمة:

$$\frac{س^٣ + ص^٣}{٦ص - س}$$

الحل

$$س = ٢م \quad ، \quad ص = ٣م$$

$$\frac{س^٣ + ص^٣}{٦ص - س} = \frac{(٢م)^٣ + (٣م)^٣}{٦(٣م) - ٢م}$$

$$\frac{٨م^٣ + ٢٧م^٣}{١٨م - ٢م} =$$

$$\frac{٣٥م^٣}{١٦م} = \frac{٣٥}{١٦}م^٢ = \frac{٣٥}{١٦}$$

### تكملة محمود عوض

معلم أول رياضيات

مثال ٧

$$\frac{أ^٢}{ب^٢} = \frac{٢ج^٢ - ٢د^٢}{٢ج^٢ - ٢د^٢}$$

فأثبت أن: أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة

الحل

حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$ب^٢(٢ج^٢ - ٢د^٢) = أ^٢(٢ج^٢ - ٢د^٢)$$

$$٢ب^٢ج^٢ - ٢ب^٢د^٢ = ٢أ^٢ج^٢ - ٢أ^٢د^٢$$

$$٢ب^٢ج^٢ - ٢أ^٢ج^٢ = ٢ب^٢د^٢ - ٢أ^٢د^٢$$

$$٢ج^٢(ب^٢ - أ^٢) = ٢د^٢(ب^٢ - أ^٢)$$

$$\frac{ب^٢}{د^٢} = \frac{أ^٢}{ج^٢} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\frac{ب}{د} = \frac{أ}{ج} \quad \therefore \text{أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة}$$

مثال ٨

إذا كان أ : ب : ج = ٥ : ٧ : ٣

وكان أ + ب = ٢٧,٦

فأوجد قيمة كل من أ ، ب ، ج

$$أ = ٥م \quad ، \quad ب = ٧م \quad ، \quad ج = ٣م$$

بالتعويض في أ + ب = ٢٧,٦

$$\therefore ٢٧,٦ = ٥م + ٧م$$

$$٢٧,٦ = ١٢م$$

$$\therefore ٢,٣ = م$$

$$\therefore أ = ٥م = ٢,٣ \times ٥ = ١١,٥$$

$$ب = ٧م = ٢,٣ \times ٧ = ١٦,١$$

$$ج = ٣م = ٢,٣ \times ٣ = ٦,٩$$



## خاصية هـ

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots$  فإن  $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}} = \text{إحدى النسب}$

■ إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و}$  فإنه يمكن ضرب أي نسبة في أي عدد ثم جمع المقدمات وجمع التوالى

فمثلاً: يمكن ضرب النسبة الأولى  $\times 2$  والنسبة الثانية  $\times 1$  وضرب النسبة الثالثة  $\times 3$  ثم بالجمع

$$\text{فيكون: } \frac{أ ٢ - ج ٣ + هـ ١}{٢ ب - ٣ د + و} = \text{إحدى النسب}$$

■ عايز تعرف هتضرب ازاي وفي كام؟ بص على بسط ومقام المطلوب إثباه في المسألة وانت هتعرف  
■ ما تيجوا نشوف !

### مثال ١٠

$$\frac{أ + ج}{٥} = \frac{ب + د}{٦} = \frac{أ + ب}{٣} \text{ إذا كان}$$

$$٧ = \frac{أ + ب + ج}{١} \text{ فاثبت أن:}$$

### الحل

للوصول للبسط المطلوب: نجمع: النسبة الأولى + الثانية + الثالثة

$$\frac{أ + ب + ج + أ + ب + ج + أ + ب + ج}{١٤} = \frac{أ + ج + ب + د + أ + ب}{٥ + ٦ + ٣}$$

$$\frac{(أ + ب + ج) ٣}{١٤} =$$

$$\frac{أ + ب + ج}{٧} = \text{إحدى النسب} \quad \text{①} \leftarrow$$

للحصول على المقام: نجمع النسبتين اللتي فيهم أ = النسبة الثانية

$$\frac{أ + ب + ج + أ - ب - أ}{٦ - ٥ + ٣}$$

$$\frac{أ ٢}{٢} = \text{إحدى النسب} \quad \text{②} \leftarrow$$

من ١، ٢ ينتج أن

$$٧ = \frac{أ + ب + ج}{١} \therefore \frac{أ + ب + ج}{٧} = أ$$

### مثال ٩

$$\frac{ع}{أ - ج ٢} = \frac{ص}{ب ٢ - ج} = \frac{س}{ب + أ ٢} \text{ إذا كان}$$

$$\text{فاثبت أن: } \frac{٢س + ص}{أ ٤ + ب ٤ - ج} = \frac{٢س ٢ + ص ٢ + ع}{ب ٦ + أ ٣}$$

### الحل

عايزين نوصل للبسط اللتي في الاثبات:  
بضرب حدى النسبة الأولى  $\times 2$  والجمع مع الثانية

$$\text{إحدى النسب} = \frac{٢س + ص}{أ ٤ + ب ٤ - ج}$$

$$\frac{٢س + ص}{أ ٤ + ب ٤ - ج} = \text{إحدى النسب} \quad \text{①} \leftarrow$$

للحصول على البسط الثانى نضرب النسبة الأولى  $\times 2$  والنسبة الثانية  $\times 2$  وجمع النسب الثلاثة

$$\frac{٢س ٢ + ص ٢ + ع}{أ ٤ + ب ٤ - ج ٢ + ج ٢ - أ ٢ - ج ٢ + ب ٢ - ج}$$

$$\frac{٢س ٢ + ص ٢ + ع}{ب ٦ + أ ٣} = \text{إحدى النسب} \quad \text{②} \leftarrow$$

من ١، ٢ ينتج أن:

$$\frac{٢س ٢ + ص ٢ + ع}{ب ٦ + أ ٣} = \frac{٢س + ص}{أ ٤ + ب ٤ - ج}$$

إذا كانت  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \frac{١٢ - ب + ج ٥}{٣س}$  فأوجد قيمة س

## مسألة مهمة

♦ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن:

أ : الأول المتناسب ، ب : الوسط المتناسب ، ج : الثالث المتناسب

♦ الوسط المتناسب بين عددين  $\pm \sqrt{\text{الأول} \times \text{الثالث}}$

مثال: الوسط المتناسب بين ٢ ، ١٨ ،  $\sqrt{\pm} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{36} = 6 \pm$

❖ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = م$

ومنها  $\text{ب} = \text{ج م}$  ،  $\text{أ} = \text{ج م}^2$

❖ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فإن :  $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{د}{هـ}$

ومنها ج = د ، ب = د<sup>٢</sup> ، أ = د<sup>٣</sup>

### ملاحظات هامة

١ التناسب المتسلسل يختلف عن التناسب العادى فى خطوتين: تكوين التناسب وإيجاد القيم

**٢ في التناسب المتسلسل نحسب قيم المقدمات بدلالة آخر تالي**

٣ عند التعويض: إذا كان  $أ = ب م$  فإن  $أ^٢ = ب^٢ م$  (حط التربيع على ب ، م)  
و إذا كان  $ب = د م$  فإن  $ب^٢ = د^٢ م$   
و إذا كان  $أ = د م$  فإن  $أ^٢ = د^٢ م$

**مثال ۲** إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل

$$\frac{b_d}{a} = \frac{j_2 - j_1}{c - a} \quad \text{فاثبت أن:}$$

## الحل

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{-1} = -j$$

∴ ج = د<sup>۱</sup> ، ب = د<sup>۲</sup> ، ا = د<sup>۳</sup>

$$\frac{د_1^2 - د_2^2}{د_1 - د_2} = \frac{ج_1^2 - ج_2^2}{ج_1 - ج_2} = \text{الأيمن}$$

$$\frac{d}{m} = \frac{(1 - \frac{1}{m})^2 d}{(1 - \frac{1}{m})^2 m d} =$$

$$\frac{د}{م} = \frac{د \times ٢ م}{د م} = \frac{ب د}{أ} = \text{الأيسر}$$

∴ الأيمن = الأيسر

**مثال ١** إذا كانت  $b$  وسطا متناسبا بين  $a$ ،  $c$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \text{فأثبت أن:}$$

## الحل

$$m = \frac{1}{2.4} =$$

∴ ب = ج م ، ا = ج م<sup>۲</sup>

$$\frac{ج^۲م^۲ + ج^۲م^۲}{ج^۲م^۲ + ج^۲م^۲} = \frac{ب^۱ + ب^۱}{ج^۲ + ب^۱} = \text{الأيمن}$$

$$m^2 = \frac{1 + m^2 m^2 j}{1 + m^2 j} =$$

$${}^2\text{م} = \frac{{}^2\text{جـ م}}{\text{ح}} = \frac{\text{أ}}{\text{ح}} = \text{الأيسر}$$

∴ الأيمن = الأيسر



مثال ٣ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د ففى تناسب متسلسل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \quad \text{فأثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$م = \frac{(م^2 - م)}{(م - 1)} = \frac{م(م - 1)}{(م - 1)} = م$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{م}{1} = م \quad \text{الأيسر}$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٤ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د ففى تناسب متسلسل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \quad \text{فأثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

مثال ٥ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \quad \text{فأثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م$$

$$ج = د م ، ب = د م^2 ، أ = د م^3$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب - ج}{ج - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{م}{1} = \frac{م}{1} = م$$

∴ الأيمن = الأيسر

مثال ٦ إذا كانت ص وسطا متناسبا بين س ، ع

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص - ع}{ع - د} \quad \text{فأثبت أن:}$$

الحل

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص}{ع} = \frac{ع}{د} = م$$

$$ع = د م ، ص = د م^2 ، س = د م^3$$

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص - ع}{ع - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص - ع}{ع - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$

$$\frac{س}{ص} = \frac{ص - ع}{ع - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د} \Rightarrow \frac{د م^3}{د م^2} = \frac{د م^2 - د م}{د م - د}$$



♣ إذا كانت ص تتغير طردياً مع س فإنها تكتب: ص  $\propto$  س ومنها يكون:

الإيجاد قيمة
$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

لحساب الثابت
$م = \frac{ص}{س}$

الإيجاد العلاقة
ص = م س

♦ العلاقة الطردية يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

♣ إذا كانت ص  $\propto$  س<sup>٢</sup> فإن الثابت م =  $\frac{ص}{س^2}$  والعلاقة هي ص = م س<sup>٢</sup>

♦ لإثبات أن ص  $\propto$  س نثبت أن ص = (ثابت) س

**مثال ٢** إذا كانت ص تتغير طردياً بتغير س وكانت ص = ١٤ عندما س = ٢ أوجد :  
(١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة س عندما ص = ٢٠

**الحل** ص  $\propto$  س  $\therefore$  ص = م س  
 $\frac{1}{3} = \frac{14}{42} = \frac{ص}{س} = م$   
العلاقة هي: ص =  $\frac{1}{3}$  س  
 $\frac{1}{3} = \frac{20}{س}$   
 $\therefore س = 3 \times 20 = 60$

**مثال ١** إذا كانت ص  $\propto$  س وكانت ص = ٦ عندما س = ٣ فأوجد : (١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة ص عندما س = ٥

**الحل** ص  $\propto$  س  $\therefore$  ص = م س  
 $2 = \frac{6}{3} = \frac{ص}{س} = م$   
العلاقة هي: ص = ٢ س  
بالتعويض عن س = ٥  
 $\therefore ص = 2 \times 5 = 10$

**مثال ٤** إذا كان:  $\frac{ص_1}{س_1 - ع} = \frac{ص_2}{س_2 - ع}$  فاثبت أن: ص  $\propto$  ع

**الحل** حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين  
 $ص_1 س_2 - ص_1 ع = ص_2 س_1 - ص_2 ع$   
 $ص_1 س_2 - ص_2 س_1 = ص_1 ع - ص_2 ع$   
 $ص_1 س_2 - ص_2 س_1 = ع (ص_1 - ص_2)$   
 $\frac{ص_1}{ص_2} = \frac{ع (ص_1 - ص_2)}{ص_2 (ص_1 - ص_2)}$   
 $\therefore ص_1 س_2 = ص_2 س_1$   
 $\therefore ص \propto س$

**مثال ٣** تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كليومتراً في ٦ ساعات، فكم كيلومتراً تقطعها السيارة في ١٠ ساعات

**الحل** نرمز للمسافة بالرمز ف والزمن بالرمز ز  
ف<sub>١</sub> = ١٥٠ ، ز<sub>١</sub> = ٦  
ف<sub>٢</sub> = ؟؟ ، ز<sub>٢</sub> = ١٠  
ف  $\propto$  ز  $\therefore \frac{ف_1}{ز_1} = \frac{ف_2}{ز_2}$   
 $\frac{150}{6} = \frac{ف_2}{10}$   
 $\therefore ف_2 = \frac{10 \times 150}{6} = 250$  كيلومتر

# التغير العكسي

♣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س فإنها تكتب: ص  $\propto \frac{1}{س}$  ومنها يكون:

**الإيجاد قيمة**

$$\frac{ص١}{س١} = \frac{ص٢}{س٢}$$

**لحساب الثابت**

$$م = ص \times س$$

**الإيجاد العلاقة**

$$ص = م$$

♦ يمكن كتابة العلاقة العكسية على الصورة ص = م أو ص =  $\frac{م}{س}$

♦ لإثبات أن ص  $\propto \frac{1}{س}$  نثبت أن ص س = ثابت

**مثال ١**

إذا كانت ص  $\propto \frac{1}{س}$  وكانت ص = ٣ عندما س = ٢  
أوجد : (١) العلاقة بين س ، ص  
(٢) قيمة ص عندما س = ١,٥

**الحل**

ص  $\propto \frac{1}{س} \therefore ص س = م$

$٦ = ٢ \times ٣ = ص \times س = م$

العلاقة هي : ص س = ٦

$\frac{ص١}{س١} = \frac{ص٢}{س٢} \quad \frac{٣}{٢} = \frac{ص}{١,٥}$   
 $ص = ١,٥ \times ٦ = ٩ \therefore ص = ٩$

**مثال ٢**

من بيانات الجدول التالي أجب:

٦	٤	٢	س
٢	٣	٦	ص

(١) بين نوع التغير بين ص ، س  
(٢) أوجد ثابت التناسب  
(٣) أوجد قيمة ص عندما س = ٣

**الحل**

١) نوع التغير عكسي (لأنه كلما زادت س نقصت ص)

٢) ثابت التناسب = ص  $\times$  س = ٢  $\times$  ٦ = ١٢

٣) بالتعويض عن س = ٣ في العلاقة ص س = ١٢  
ص  $\times$  ٣ = ١١  $\therefore ص = ٤$

**مثال ٣**

إذا كان : ص = ٩ - ٤س + ٤  
فأثبت أن: ص  $\propto \frac{1}{س}$

**الحل**

بتحليل المقدار المربع الكامل

( ص = ٩ - ٤س + ٤ ) باخذ الجذر التربيعي للطرفين

ص = ٩ - ٤س + ٤

ص = ٩ - ٤س + ٤

$\therefore ص \propto \frac{1}{س}$

**مثال ٤**

إذا كان: ص = ٩ - ٤س + ٤ ، ص  $\propto \frac{1}{س}$  وكان أ = ١٨ عندما س =  $\frac{٢}{٣}$   
فأوجد العلاقة بين س، ص ثم استنتج قيمة ص عندما س = ١

**الحل**

ص  $\propto \frac{1}{س} \therefore ص س = م$

بالتعويض عن ص = ٩ - ٤س + ٤

(٩ - ٤س + ٤) س = م  $\therefore م = (٩ - ٤س + ٤) \times \frac{٢}{٣}$

$\therefore م = ٩ \times \frac{٢}{٣} = ٦$

$\therefore$  العلاقة هي ص س = ٦

عندما س = ١ ص  $\times$  ١ = ٦  $\therefore ص = ٦$



## أسئلة اختر على الوحدة الثانية

١ إذا كان  $3 = \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$  فإن  $\frac{3}{4} = \frac{4}{5}$  ..... =

- (أ)  $\frac{3}{4}$  (ب)  $\frac{4}{5}$  (ج)  $\frac{3}{5}$  (د)  $\frac{4}{3}$

٢ إذا كان  $5 = \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$  فإن  $\frac{3}{4} = \frac{2}{3}$  ..... =

- (أ)  $\frac{5}{2}$  (ب)  $\frac{2}{5}$  (ج)  $\frac{10}{3}$  (د)  $\frac{5}{3}$

٣ إذا كان  $\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$  فإن  $\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$  ..... =

- (أ)  $\frac{3}{5}$  (ب)  $\frac{5}{3}$  (ج)  $\frac{25}{9}$  (د)  $\frac{1}{3}$

٤ الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٦ ، ٨ هو .....

- (أ) ٤ (ب) ٧ (ج) ١٦ (د) ٢٠

٥ إذا كانت أ ، ٤ ، ب ، ٩ كميات متناسبة فإن  $\frac{4}{9} = \frac{3}{4}$  ..... =

- (أ)  $\frac{9}{4}$  (ب)  $\frac{4}{9}$  (ج)  $\frac{9}{4}$  (د)  $\frac{4}{9}$

٦ إذا كان: أ ، ٢ ، ب ، ٣ كميات متناسبة فإن  $\frac{2}{3} = \frac{3}{2}$  ..... =

- (أ)  $\frac{1}{2}$  (ب)  $\frac{3}{1}$  (ج)  $\frac{2}{3}$  (د)  $\frac{3}{2}$

٧ إذا كان  $\frac{1}{5} = \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$  فإن  $\frac{3}{4} = \frac{2}{4}$  ..... =

- (أ) ٥ (ب) ٤ (ج) ٩ (د) ١

٨ الوسط المتناسب بين ٣ ، ٢٧ يساوى .....

- (أ) ٩ (ب) ٩- (ج)  $9 \pm$  (د) ١٥

٩ الثالث المتناسب للعددين ٥ ، ٨٠ يساوى .....

- (أ) ١٠٠ (ب) ٨٠ (ج) ٤٠ (د) ٢٠

٩ إذا كان ٣ س ص = ٨ فإن ..... =

- (أ) ٣ س ص (ب) ٣ ص ص (ج) ٣ س ٨ ص (د) ٣ س ص

١٥ إذا كان ٣ س وكان ص = ٢ عندما س = ٨ فإن ص = ٣ عندما س = ..... =

- (أ) ١٦ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٦

١١ العلاقة التي تمثل تغيراً طردياً بين المتغيرين س ، ص هي .....

- (أ)  $\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$  (ب)  $\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$  (ج)  $\frac{4}{3} = \frac{5}{3}$  (د)  $\frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

١٢ إذا كان ٣ س ص = ٧ فإن ٣ ص ..... =

- (أ)  $\frac{1}{3}$  (ب) ٧- (ج) ٣ (د) ٧ +

١٣ إذا كانت ٧ ، س ،  $\frac{1}{3}$  في تناسب متسلسل ، فإن س<sup>٢</sup> ص = ..... =

- (أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ٧ (د) ٩



# واجب على الوحدة الثانية

النسبة والتناسب	التناسب المتسلسل
<p>١ أوجد العدد الذي إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ١١ : ٧ فإنها تصبح ٥ : ٤</p> <p>٢ عددان النسبة بينهما ٥ : ٤ وإذا طرح من كل منهما ٦ أصبحت النسبة بينهما ٣ : ٢ أوجد العددين</p> <p>٣ أوجد الثالث المتناسب للكميات ٨ ، ٩ ، ٢٧</p> <p>٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ أصبحت أعدادا متناسبة</p> <p>٥ إذا كانت ٣ = أ = ٢ ب فأوجد قيمة <math>\frac{أ-٣}{ب+١٢}</math></p> <p>٦ إذا كانت <math>\frac{س}{٣} = \frac{ص}{٤} = \frac{ع}{٥}</math> فأوجد قيمة المقدار: <math>\frac{ص٢ - ع}{٣س - ٢ص + ع}</math></p> <p>٧ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن: <math>\frac{أ٣}{ب} = \frac{٦ج - أ٣}{د٢ - ب}</math></p> <p>٨ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن: <math>\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢د}{٢د - ٢ب}</math></p> <p>٩ إذا كان <math>\frac{أ}{ص٤ + س} = \frac{ب}{ص٤ - س}</math> فاثبت أن: <math>\frac{أ+ب}{ص٣ - س٣} = \frac{أ-ب}{ص٥ + س٣}</math></p> <p>١٠ إذا كان <math>\frac{أ}{ب} = \frac{٢ج - ٢د}{٢د - ٢ب}</math> فاثبت أن أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة</p>	<p>١ إذا كانت الكميات أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فاثبت أن <math>\frac{أ+٢د}{ب} = \frac{٢د+ج}{د}</math></p> <p>٢ إذا كانت أ ، ب ، ج ، د في تناسب متسلسل فاثبت أن <math>\frac{أ}{ب+د} = \frac{ج}{٢د+د٢}</math></p> <p>٣ إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فاثبت أن <math>\frac{٢ج - ٢ب}{٢أ - ٢ب} = \frac{٢ج - ٢ب}{٢أ - ٢ب}</math></p> <p>٤ أوجد العدد الذي إذا أضيف للأعداد ١ ، ٥ ، ١٧ فإنها تكون تناسبا متسلسلا</p>
التغير الطردى والعكسي	
<p>١ إذا كانت ص ٣٠ وكانت ص = ٢٠ عندما س = ٧ فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٤</p> <p>٢ إذا كانت أ ٣٠ وكانت أ = ١٠ عندما ب = ٥ فأوجد: (١) العلاقة بين أ ، ب (٢) قيمة ب عندما أ = ٤</p> <p>٣ إذا كانت ص ٣٠ <math>\frac{١}{س}</math> وكانت ص = ٢ عندما س = ٤ فأوجد: (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة س عندما ص = ١٦</p> <p>٤ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت ص = ٢١ عندما س = ٤ فأوجد قيمة ص عندما س = ٧</p> <p>٥ إذا كانت <math>\frac{أ+٢}{٦} = \frac{ب+٣}{٣}</math> فاثبت أن أ ٣٠ ج</p>	

## اختبار على الوحدة الثانية

إعداد أ / محمود عوض

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان ١ ، س ، ٤ في تناسب متسلسل فإن س = .....  
 (أ) ١ ± (ب) ٢ ± (ج) ٤ ± (د) ٣ ±

٢ إذا كان  $\frac{1}{4} = \frac{ب}{3}$  فإن  $\frac{ب-أ}{ب+أ} = \dots\dots\dots$   
 (أ)  $\frac{3}{5}$  (ب)  $\frac{2}{5}$  (ج)  $\frac{1}{3}$  (د)  $\frac{1}{5}$

٣ إذا كانت ص تتغير عكسيا مع س وكانت  $\sqrt{ص} = \sqrt{ص}$  عندما  $\frac{1}{\sqrt{ص}} = \dots\dots\dots$  فإن ثابت التناسب = .....  
 (أ) ٥ (ب) ٣٥ (ج)  $\frac{5}{\sqrt{ص}}$  (د)  $\frac{1}{5}$

٤ إذا كانت أ ، ب ، ٢ ، ٣ كميات متناسبة فإن  $\frac{ب}{أ} = \dots\dots\dots$   
 (أ)  $\frac{3}{2}$  (ب)  $\frac{2}{3}$  (ج) ٣ (د) ٢

السؤال الثاني:

(أ) إذا كانت ص تتغير عكسيا بتغير س وكانت ص = ٢ عندما س = ٦  
 فأوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

(ب) إذا كانت ٥ = أ = ٣ = ب فأوجد قيمة  $\frac{٩ + ١٧}{٢ + ٤}$

السؤال الثالث:

(أ) إذا كانت ب وسطا متناسبا بين أ ، ج فاثبت أن:  $\frac{أ + ٢ب}{ب} = \frac{٢ب + ج}{ب}$

(ب) إذا كانت ص ٥٥ س وكانت ص = ٣ عندما س = ٤ فأوجد:  
 (١) العلاقة بين ص ، س (٢) قيمة ص عندما س = ٨

السؤال الرابع:

(أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد ٣ ، ٥ ، ١٨

(ب) إذا كانت أ ، ب ، ج ، د كميات متناسبة فاثبت أن  $\frac{أ + ٢ج}{ب + ٣د} = \frac{٢ - ج}{٢ - د}$

انتهت الأسئلة



## التشتت

◆ التشتت هو التباعد أو الاختلاف

◆ من مقاييس التشتت: المدى ، الانحراف المعياري

## المدى

١

◆ هو أبسط مقاييس التشتت وأسهلها. وهو الفرق بين أكبر القيم وأصغرها.

$$\text{المدى} = \text{أكبر قيمة} - \text{أصغر قيمة}$$

◆ مثال: المدى للقيم ٢٣ ، ٢٢ ، ١٥ ، ١٨ ، ، ١٧ هو  $٨ = ٢٣ - ١٥$

الانحراف المعياري  $\sigma$ 

٢

◆ هو الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

◆ الانحراف المعياري هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً وأدقها.

◆ إذا تساوت جميع المفردات فإن : الانحراف  $\sigma$  = صفر والمدى = صفر

نصائح  
معلم أول رياضيات  
محمود عوض

## حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ك}}{\text{مج ك}}}$$

حيث:  $\bar{س}$  الوسط الحسابي ، ك التكرار

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س} \times \text{ك)}}{\text{مج ك}}$$

## ملاحظات للحل

❖ تكون جدول من ٦ أعمدة

❖ العمود الأول س نكتب فيه أرقام الصف الأول من المسألة

❖ العمود الثاني ك نكتب فيه أرقام الصف الثاني من المسألة

❖ نملأ أول ثلاثة أعمدة ثم نحسب الوسط  $\bar{س}$  ثم نكمل الجدول

## حساب الانحراف المعياري لمجموعة من القيم

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س) }^2 \text{ ن}}{\text{ن}}}$$

حيث:  $\bar{س}$  الوسط الحسابي ، ن عدد القيم

$$\text{لحساب الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

## ملاحظات للحل

◆ تكون جدول مكون من ٣ أعمدة

◆ العمود الأول س : نكتب فيه القيم التي في المسألة

◆ نحسب الوسط  $\bar{س}$  قبل أن نملأ الجدول



### مثال ١

احسب الانحراف المعياري للقيم:

١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

الحل

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددهم}}$$

$$20 = \frac{100}{5} = \frac{27+20+5+32+16}{5} =$$

س	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>
١٦	٤ - ٢٠ = ١٦	١٦
٣٢	١٢ = ٢٠ - ٣٢	١٤٤
٥	١٥ = ٢٠ - ٥	٢٢٥
٢٠	٠ = ٢٠ - ٢٠	٠
٢٧	٧ = ٢٠ - ٢٧	٤٩
مج	xxx	٤٣٤

$$9,3 = \frac{434}{5} \sqrt{\frac{\text{مج (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup>}}{ن}} = \sigma$$

### مثال ٢

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦	١٠٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup> × ك
٠	٨	صفر	٢ - ٠ = ٢	٤	٣٢ = ٨ × ٤
١	١٦	١٦	١ - ٢ = -١	١	١٦ = ١٦ × ١
٢	٥٠	١٠٠	٠ = ٢ - ٢	٠	٠ = ٥٠ × ٠
٣	٢٠	٦٠	١ = ٢ - ٣	١	٢٠ = ٢٠ × ١
٤	٦	٢٤	٢ = ٢ - ٤	٤	٢٤ = ٦ × ٤
مج	١٠٠	٢٠٠	xx	xx	٩٢

$$\text{الوسط } \bar{س} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{200}{100} = 2$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س -  $\bar{س}$ )<sup>٢</sup> × ك}}{\text{مج ك}}} = \sqrt{\frac{92}{100}} = 1 \text{ طفل}$$

### تدريب

احسب الانحراف المعياري للقيم:

٥ ، ٦ ، ٧ ، ٩ ، ٨

الحل


### تدريب

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري

للتوزيع التكراري الآتي:

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢	المجموع
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١	١٠

الحل

س	ك	س × ك	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>	(س - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup> × ك
مج			xx	xx	

## حساب الانحراف المعياري للجدول التكراري ذي المجموعات

لحل بنفس قوانين وطريقة حل الانحراف المعياري للجدول التكراري البسيط مع اختلاف واحد فقط وهو:

◆ العمود الأول س نكتب فيه مركز المجموعة وحسب كالتالي :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

**تدريب** احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي:

عدد الكيلومترات	٠-١٠	١٠-٢٠	٢٠-٣٠	٣٠-٤٠	٤٠-٥٠	المجموع
عدد السيارات	٢	٥	١١	١٥	٧	٤٠

الحل


**مثال ٣** احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري الآتي:

المجموعة	٠-٤	٤-٨	٨-١٢	١٢-٢٠	المجموع
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩
المجموع	٢٠	٣٢	٥٦	٢٤	١٣٢

الحل

نحسب مراكز المجموعات لنكتبها في عمود س

$$١٠ = \frac{٠ + ٤}{2} = ٢م ، ٦ = \frac{٤ + ٨}{2} = ٢م ، ١٢ = \frac{٨ + ١٢}{2} = ٢٠م$$

$$١٤م = \frac{١٢ + ١٦}{2} = ١٤م ، ١٨ = \frac{١٦ + ٢٠}{2} = ١٨م$$

س	ك	س × ك	س - س	(س - س)²	(س - س)² × ك
٢	٣	٦	٩,٦-	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٦	٤	٢٤	٥,٦-	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
١٠	٧	٧٠	١,٦-	٢,٥٦	١٧,٩٦
١٤	٢	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٨	٩	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مج	٢٥	٢٩٠	XX	XX	٨٠٠

$$\text{الوسط س} = \frac{\text{مج (س × ك)}}{\text{مج ك}} = \frac{٢٩٠}{٢٥} = ١١,٦$$

$$\text{الانحراف } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مج (س - س)²}}{\text{مج ك}}}$$

$$٥,٧ = \sqrt{\frac{٨٠٠}{٢٥}} =$$

## أسئلة اختر على الإحصاء

- ١) الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي يسمى .....  
 ( أ ) المدى ( ب ) الوسط الحسابي ( ج ) الانحراف المعياري ( د ) المنوال
- ٢) المدى لمجموعة القيم ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ٥ يساوي .....  
 ( أ ) ٣ ( ب ) ٤ ( ج ) ٦ ( د ) ١٢
- ٣) الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو .....  
 ( أ ) المنوال ( ب ) الوسيط ( ج ) الوسط ( د ) المدى
- ٤) أسهل وأبسط مقاييس التشتت هو .....  
 ( أ ) المنوال ( ب ) الوسيط ( ج ) المدى ( د ) الانحراف المعياري
- ٥) إذا كانت ١٨ هي أكبر مفردات مجموعة ما وكان المدى = ٦ فإن أصغر مفردات المجموعة = .....  
 ( أ ) ٨ ( ب ) ١٢ ( ج ) ٢٤ ( د ) ٣٦

## واجب على الإحصاء

- ١) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للقيم ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٦
- ٢) فيما يلي التوزيع التكراري لعدد الوحدات التالفة التي وجدت في ١٠٠ صندوق من الوحدات المصنعة
- |                     |     |    |    |    |    |    |
|---------------------|-----|----|----|----|----|----|
| عدد الوحدات التالفة | صفر | ١  | ٢  | ٣  | ٤  | ٥  |
| عدد الصناديق        | ٣   | ١٦ | ١٧ | ٢٥ | ٢٠ | ١٩ |
- أوجد الانحراف المعياري للوحدات التالفة
- ٣) التوزيع التكراري الآتي يبين درجات ٥٠ طالب في مادة الرياضيات
- |                     |     |     |     |     |     |         |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|
| عدد الوحدات التالفة | -١٠ | -٢٠ | -٣٠ | -٤٠ | -٥٠ | المجموع |
| عدد الصناديق        | ٢   | ٨   | ١٠  | ١٨  | ١٢  | ٥٠      |
- أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع



# تراكمى

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١  $\{1, 0\} - [3, 1] = \dots$   
 (أ)  $[3, 1]$  (ب)  $[3, 1]$  (ج)  $[3, 1]$  (د)  $\{3\}$

٢ مجموعة حل المعادلة  $(س - 1)^2 = 9$  في ح هي .....  
 (أ)  $\{4\}$  (ب)  $\{2\}$  (ج)  $\{2, 4\}$  (د)  $\{3\}$

٣ إذا كانت  $س^2 = 34$  فإن س .....  
 (أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 64

٤ إذا كانت  $\frac{3}{4} = \frac{3}{س} + \frac{3}{4}$  فإن س .....  
 (أ) 2 (ب) 4 (ج) 3 (د)  $\frac{3}{2}$

٥ ٢٠٪ من ١٠ جنيهات = ..... جنيه  
 (أ) 2 (ب) 2,5 (ج) 5 (د) 20

٦ إذا كان س عددا سالبا فإن أكبر الأعداد التالية هو .....  
 (أ)  $س + 3$  (ب)  $3س$  (ج)  $3 - س$  (د)  $\frac{3}{س}$

٧  $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5}) = \dots$   
 (أ) 5 (ب) 3 (ج) 2 (د) 1

٨ إذا كان  $أ^2 - ب^2 = 12$ ،  $أ + ب = 3$  فإن  $أ - ب = \dots$   
 (أ) 8 (ب) 4 (ج) 10 (د) 36

٩  $[5, 8] \cup \{5, 8\} = \dots$   
 (أ)  $[5, 8]$  (ب)  $[5, 8]$  (ج)  $[5, 8]$  (د)  $[5, 8]$

١٠  $ح \cap ح = \dots$   
 (أ)  $ح \cap ح$  (ب)  $ن \cap ن$  (ج)  $ح \cup ح$  (د)  $ن \cup ن$

١١ المعكوس الضربى للعدد  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  هو .....  
 (أ)  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  (ب)  $\sqrt[3]{6}$  (ج)  $\sqrt[3]{2}$  (د)  $2 - \sqrt[3]{2}$

تكملة  
 معلم أول رياضيات  
 تيم

الآخيرة



www.Cryp2Day.com

مذكرات جاهزة للطباعة